Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Nota: El símbolo log se refiere al logaritmo en base 10.

1. Determine *x* sin usar tablas ni calculadora:

   a) $x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$
   22,5

   b) $x = 100^{\frac{1}{2} - \log \sqrt[4]{4}}$
   5

   c) $x = \sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log 16}}$
   20

   d) $x = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$
   $\frac{25}{2}$

2. Resuelva las ecuaciones siguientes:

   a) $\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0$
   8

   b) $\log_a \left\{1 + \log_b \left[1 + \log_c(1 + \log_p x)\right]\right\} = 0$
   1

   c) $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) = 6$
   2

   d) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} = 3$
   $x_1 = 2,\ x_2 = 3$

   e) $\log\left[x - a(1-a)^{-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{2}\log(1+\frac{1}{a}) - \log\sqrt{\frac{a^3+a}{a+1} - a^2} = 0$
   $\frac{1}{\sqrt{1-a}}$

   f) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$
   16

   g) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$
   1

   h) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$
   6

   i) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$
   10

   j) $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$
   9

   k) $\sqrt[x^2-1]{a^3} \cdot \sqrt[2x-2]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-1}} = 1$
   $x_1 = 5,\ x_2 = -3$

   l) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$
   4

   m) $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{x-1} = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$
   15 (utilizando la fórmula de la suma de una progresión geométrica)

n) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$
$x_1 = 4,\ x_2 = 0$

ñ) $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$
$x_1 = 2,\ x_2 = e^{-4}$

o) $\log\left(4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1\right) - 1 = \log\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2\right) - 2\log 2$
36

p) $\dfrac{2\log 2 + \log(x-3)}{\log(7x+1) + \log(x-6) + \log 3} = \dfrac{1}{2}$
9

q) $\log_5 120 + (x-3) - 2\log_5(1 - 5^{x-3}) = -\log_5(0,2 - 5^{x-4})$
1

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 8^{2x+1} & = & 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} & = & \sqrt{25^{2y+1}} \end{array}\right.$
$x = \frac{3}{14},\ y = \frac{1}{14}$

b) $\left\{\begin{array}{rcl} \log(x^2 + y^2) - 1 & = & \log 13 \\ \log(x+y) - \log(x-y) & = & 3\log 2 \end{array}\right.$
$x = 9,\ y = 7$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} \log_a x + \log_a y + \log_a 4 & = & 2 + \log_a 9 \\ x + y - 5a & = & 0 \end{array}\right.$
$x_1 = \frac{a}{2},\ y_1 = \frac{9}{2}\ ;\ \ x_2 = \frac{9}{2},\ y_2 = \frac{a}{2}$

d) $\left\{\begin{array}{rcl} \log_a x + \log_{a^2} y & = & \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x + \log_b y & = & \frac{3}{2} \end{array}\right.$
$x = \frac{a^2}{b},\ y = \frac{b^2}{a}$ (teniendo en cuenta que $\log_{c^2} f = \frac{1}{2}\log_c f$)