Tests de Álgebra Lineal

Roberto Hernando Velasco

Septiembre, 1998

Índice general

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

Ejercicio 1.1. El conjunto $\mathcal{F}$ de las funciones reales de una variable tiene estructura de espacio vectorial, si se define como ley externa el producto de un número real por una función y como ley interna:

a) La suma de dos funciones
b) La composición de dos funciones
c) El producto de dos funciones

Solución. a)

Ejercicio 1.2. Si U es un espacio vectorial, se puede dotar a $U \times U$ de estructura de espacio vectorial con la ley interna

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

y la ley externa:

a) $\alpha(u, v) = (\alpha v, u)$
b) $\alpha(u, v) = (\alpha u, 0_U)$
c) $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$

Solución. c)

Ejercicio 1.3. Si u, v son dos vectores de un espacio vectorial U, tales que $\alpha u + \beta v = 0_U$ cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces:

a) u, v son vectores linealmente independientes
b) $u = v = 0_U$
c) No existen vectores u, v en las condiciones del enunciado.

Solución. b)

Ejercicio 1.4. Si U es un espacio vectorial real y $u, v, w \in U$ verifican $w = u + v$, entonces:

a) $w = 0_U \;\Rightarrow\; \{u, v\}$ es un sistema ligado[1]

[1] Es decir, son linealmente dependientes

b) $w \neq 0_U \;\Rightarrow\; \{u, v\}$ es un sistema libre[2]

c) $\{u, v\}$ es un sistema ligado

Solución. a)

Ejercicio 1.5. Si U es un espacio vectorial real y $u, v, w \in U$ verifican

$$u + 2v - w = 2u - v + w,$$

entonces:

a) $\{u, v, w\}$ es un sistema ligado

b) No hay datos suficientes para decidir si $\{u, v, w\}$ es o no un sistema libre

c) No existen vectores en las condiciones del enunciado

Solución. a)

Ejercicio 1.6. Si U es un espacio vectorial real y $u \in U$ no es combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_n \in U$, entonces:

a) $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ es un sistema libre

b) $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ es un sistema ligado

c) No hay datos suficientes para determinar si $\{u_1, \ldots, u_n, u\}$ es un sistema libre o ligado

Solución. c)
Contraejemplo de a: $(0, 1)$; $(0, 0), (1, 0)$.
Contraejemplo de b: $(0, 0, 1)$; $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$.

Ejercicio 1.7. Si $\{u, v\}$ y $\{v, w\}$ son dos sistemas libres de un espacio vectorial U, entonces:

a) $\{u, v, w\}$ es un sistema libre

b) $\{u, v, w\}$ es un sistema ligado

c) No hay datos suficientes para decidir si $\{u, v, w\}$ es un sistema libre o ligado

Solución. c)

Ejercicio 1.8. Si U es un espacio vectorial y $u, v, w \in U$, entonces:

a) $\{u, v\}$ sistema libre $\Rightarrow w$ es combinación lineal de u, v

b) $\{u, v, w\}$ sistema libre $\Rightarrow \{u, v\}$ es sistema libre

c) $0u + 0v + 0w = 0_U \;\Rightarrow\; \{u, v, w\}$ es sistema libre

[2] Es decir, son linealmente independientes

Solución. b)

Ejercicio 1.9. Si $\{u, v\}$ es un sistema libre de un espacio vectorial U, entonces:

a) $\{u, \alpha u + v\}$ es un sistema libre $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

b) $\{u, \alpha u + v\}$ es un sistema libre $\Leftrightarrow \alpha = 0$

c) $\{u, \alpha v\}$ es un sistema libre $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

Solución. a)

Ejercicio 1.10. Si U es un espacio vectorial y $u, v, w \in U$, entonces:

a) $\{u, v, w\}$ sistema ligado $\Rightarrow$ u es combinación lineal de v, w

b) $\{u, v, w\}$ sistema ligado $\Rightarrow$ $\{u, v\}$ es sistema libre

c) $\{u, v, w\}$ sistema ligado $\Rightarrow$ $\{u, v, w\}$ es sistema ligado

Solución. c) (Si se amplía un sistema ligado se obtiene otro sistema ligado).

Capítulo 2

Matrices

Ejercicio 2.1. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son tales que A es inversible y $AB = (0)$, entonces:

a) $B = (0)$
b) $B = A^{-1}$
c) $A = (0)$

Solución. a)

Ejercicio 2.2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ verifican $AB = B$, entonces:

a) B inversible $\Rightarrow A = I_n$
b) A inversible $\Rightarrow A = I_n$
c) A es inversible

Solución. a)

Ejercicio 2.3. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces:

a) $AB = (0) \;\Rightarrow\; A = (0)$ o $B = (0)$
b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
c) $AB = I_n \;\Rightarrow\; A$ y B son inversibles

Solución. c)

Ejercicio 2.4. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ verifican $AB = I_n$, entonces:

a) $BA \neq I_n$
b) $BA = I_n$
c) $A^2B^2 \neq I_n$

Solución. b)

Ejercicio 2.5. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces:

a) A diagonal $\Rightarrow AB = BA$
b) $AB = BA$, en el caso de que A tenga todos sus elementos iguales
c) A escalar[1]

Solución. c)

Ejercicio 2.6. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces:

a) Existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$
b) Existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, única, tal que $B^2 = A$
c) No necesariamente existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$

Solución. c) (Reducción al absurdo cuando $\det A < 0$)

Ejercicio 2.7. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es idempotente[2], entonces:

a) $I_n + A$ es idempotente
b) $I_n - A$ es idempotente
c) $(I_n + A)^2 = A$

Solución. b) (El recíproco también es cierto)

Ejercicio 2.8. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es idempotente, entonces:

a) A es inversible
b) $A - I_n$ es inversible
c) $2A - I_n$ es inversible

Solución. c) (Se comprueba que $(2A - I_n)^2 = I_n$, y las matrices (0) e I_n son contraejemplos).

Ejercicio 2.9. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es tal que $A^3 - 3A - 2I_n$ es inversible, entonces:

a) A es inversible
b) $A + I_n$ es inversible
c) $A - 2I_n$ es inversible

Solución. b)

Ejercicio 2.10. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ verifican que A, B y $A + B$ son inversibles, entonces:

[1] A es escalar si $A = \alpha I_n$ para algún $\alpha \in \mathbb{K}$
[2] $A^2 = A$

a) $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B$

b) $A^{-1}+B^{-1}$ no es inversible

c) $A^{-1}+B^{-1} = (A+B)^{-1}$

Solución. a)

Ejercicio 2.11. Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, entonces:

a) $\det(AB) = \det A \det B$

b) $(A+B^{\mathtt{t}})^{\mathtt{t}} = A^{\mathtt{t}} + B$

c) $AB = BA$

Solución. b)

Capítulo 3

Aplicaciones lineales

Ejercicio 3.1. La siguiente aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es lineal:

a) $f(x, y) = (x - y, x, 1 + x + y)$
b) $f(x, y) = (\sqrt{2}x - 3y, 0, x + 2y)$
c) $f(x, y) = (x - y, x^2, y^3)$

Solución. b)

Ejercicio 3.2. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \det \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Es lineal
b) No es suprayectiva
c) Es inyectiva

Solución. a)

Ejercicio 3.3. Si se considera $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces la aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(a + bi) = a - bi \ \forall a, b \in \mathbb{R}$:

a) Es lineal cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
b) Es lineal cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
c) No es lineal, independientemente del cuerpo $\mathbb{K}$

Solución. a)

Ejercicio 3.4. Si U es un espacio vectorial y $f : U \to U$ es una aplicación que verifica $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$ para cualesquiera $u, v \in U$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces:

a) Existen $u, v \in U$ tales que $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$
b) Existen $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in U$ tales que $f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$

c) f es un endomorfismo

Solución. c)

Ejercicio 3.5. La aplicación $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es lineal, si $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:

a) $f(A) = \det(A)$

b) $f(A) = \mathrm{rg}(A)$

c) $f(A) = \mathrm{tr}(A)$

Solución. c)

Ejercicio 3.6. Si U y V son dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo y $f, g : U \to V$ son isomorfismos, entonces:

a) $f + g$ es isomorfismo

b) $f + g$ es aplicación lineal, no necesariamente biyectiva

c) $f - g$ no es isomorfismo

Solución. b)
Un ejemplo de que no siempre es biyectiva es $f(x) = x$ y $g(x) = -x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3.7. Si U es un espacio vectorial, u_1, u_2 son vectores de U linealmente independientes, $S = \langle u_1, u_2\rangle$[1] y f es un endomorfismo de U que verifica $f(u) = u\ \forall u \in S$, entonces:

a) $f(u) = u\ \forall u \in U$

b) $\dim U = 2 \Rightarrow f = \mathrm{id}_U$

c) $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$

Solución. b) (En este caso, $U = S$).

Ejercicio 3.8. Si U es un espacio vectorial, S un subespacio vectorial de U y f un endomorfismo de U, entonces:

a) $f(S) \subseteq S$

b) $f(S)$ es un subespacio vectorial de U

c) $f(S) \bigcap S = \{0_U\}$

Solución. b)

[1] $\langle\,\rangle$ indica subespacio generado

Capítulo 4

Diagonalización

Ejercicio 4.1. Si U es un espacio vectorial real, f un endomorfismo de U y $u \in U$ un vector propio de f con valor propio asociado $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

a) $-u$ es vector propio de f de valor propio $-\lambda$
b) $-u$ es vector propio de f de valor propio λ
c) $2u$ es vector propio de f de valor propio 2λ

Solución. b)

Ejercicio 4.2. Si U es un espacio vectorial, f un endomorfismo de U, u un vector propio de f de valor propio λ y $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$, entonces:

a) αu es vector propio de f de valor propio $\alpha\lambda$
b) $\alpha^{-1}u$ es vector propio de αf de valor propio λ
c) αu es vector propio de αf de valor propio $\alpha\lambda$

Solución. c)

Ejercicio 4.3. Si U es un espacio vectorial y f un endomorfismo de U que tiene a 0 como valor propio, entonces[1]:

a) $V(0) = \{0_U\}$
b) $f(V(0)) = \{0_U\}$
c) $f(V(0)) = V(0)$

Solución. b)

Ejercicio 4.4. Si U es un espacio vectorial real, f un endomorfismo de U, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in U$ no es nulo, entonces:

[1] Si λ es un valor propio de f, se define el *subespacio propio* de λ como: $V(\lambda) = \{u \in U \mid f(u) = \lambda u\}$

a) $f(\lambda u) = \lambda f(u) \;\Rightarrow\; \lambda$ es un valor propio de f

b) $f(\lambda u) = u \;\Rightarrow\; \lambda^{-1}$ es un valor propio de f

c) $f(\lambda u) = u \;\Rightarrow\; 1$ es un valor propio de f

Solución. b)

Ejercicio 4.5. Si U es un espacio vectorial real, f un endomorfismo de U y $u \in U$ es tal que $f(u) = f(2u)$, entonces:

a) 2 es valor propio de f

b) $u = 2u$ y por tanto $u = 0_U$

c) $f(u) = f(2u) = 0_U$

Solución. c)

Capítulo 5

Formas bilineales y cuadráticas

Ejercicio 5.1. Es una forma bilineal la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

a) $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1 \, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

b) $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + y_1y_2 \, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

c) $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1 + y_2 \, \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

Solución. a)

Ejercicio 5.2. Si $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces no es una forma bilineal la aplicación $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

a) $f(A, B) = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}CB) \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

b) $f(A, B) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B) \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

c) $f(A, B) = \mathrm{rg}(AB) \ \forall A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

Solución. c)

Ejercicio 5.3. Si U es un espacio vectorial real y $f : U\times U \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal tal que $f(u, u) = 0 \, \forall u \in U$, entonces:

a) f es la forma bilineal nula

b) f es simétrica

c) f es antisimétrica

Solución. c)

Ejercicio 5.4. Si U es un espacio vectorial real y $f, g : U \times U \to \mathbb{R}$ son dos formas bilineales tales que $f(u, u) = g(u, u) \, \forall u \in U$, entonces:

a) $f = g$

b) f simétrica $\Rightarrow f = g$

c) f, g simétricas $\Rightarrow f = g$

Solución. c)

Ejercicio 5.5. Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, entonces:

a) f simétrica $\Rightarrow f$ es la forma bilineal nula

b) f antisimétrica $\Rightarrow f$ es la forma bilineal nula

c) f es la forma bilineal nula

Solución. b)

Bibliografía

[LPMRP] Lapresta, Panero, Martínez, Rincón y Palmero. Tests de Álgebra Lineal, *Editorial AC, 1992*